

CFRP

احسان دهقانی^۱، فرهاد دانشجو^۲

(دریافت: ۸۸/۹/۱۸، پذیرش: ۸۸/۱۲/۲۵)

چکیده

کاهش سختی و افزایش دامنه ارتعاش تیرهای فولادی ترک‌خورده، موجب از دست رفتن کارایی سازه در بارهای بهره‌برداری می‌شود. یکی از روشهای بازایی سختی این نوع تیرها چسباندن ورقهای CFRP روی بال کششی تیرها و در محل بروز ترکها می‌باشد. برای محاسبه میزان سختی بازایی شده در تیر ترک‌خورده توسط CFRP بطور معمول از روشهای تحلیل اجزاء محدود استفاده می‌شود. در این مقاله فرمولاسیون محاسبه سختی تیر بهسازی شده توسط CFRP به روش ریاضی ارائه شده است. در این فرمولاسیون سختی تیر بهسازی شده بر اساس سختی تیر سالم، سختی تیر با فرض ایجاد مفصل در محل ترک، مشخصات مصالح چسب و CFRP و ابعاد هندسی سازه بدست می‌آید. برای استخراج این فرمولها از مشابه سازی سختی خمشی قسمت باقیمانده در مقطع ترک و ورق تقویتی با یک فنر دورانی استفاده شده است. نحوه بدست آوردن سختی فنر دورانی بر اساس سختی تیر ترک‌خورده و سختی تیر سالم نیز پیشنهاد گردیده است. روش انجام محاسبات سختی تیر بهسازی شده با ورق CFRP در دو دسته تیرهای معین و نامعین بطور جداگانه بررسی شده و فرمولاسیون پیشنهادی برای دو مورد خاص تیر دوسرهمفصل و دوسرگیردار پیاده سازی گردیده است. به منظور صحت‌سنجی نتایج بدست آمده از روش تحلیلی پیشنهادی، هجده نمونه فرضی با روش اجزاء محدود نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. مقایسه نتایج فرمولاسیون پیشنهادی با روش اجزاء محدود تطابق بسیار خوبی را نشان داده است. فرمول دیگری نیز با صرف نظر کردن از سختی خمشی باقیمانده در مقطع ترک، برای محاسبه سختی تیر بهسازی شده با CFRP در کاربردهای عملی پیشنهاد شده است. مقایسه نتایج بدست آمده از این فرمول و فرمولهای دقیقتر نشان‌دهنده دقت بسیار خوب رابطه پیشنهادی است. با استفاده از این روش می‌توان بدون نیاز به اندازه‌گیری عمق ترک، میزان مصالح مورد نیاز برای بهسازی تیر با CFRP را از رابطه‌های ساده‌ای محاسبه نمود.

کلمات کلیدی

بهسازی، تیر فولادی، ترک، سختی، CFRP

Stiffness Formulation of Cracked Steel Beam Rehabilitated with CFRP

E. Dehghani, F. Daneshjoo

ABSTRACT

Stiffness degradation and increase in vibration amplitude of cracked steel beams, cause to lose the efficiency of structure in service loads. Bonding CFRP laminates on tension flange is one of the rehabilitating methods of these beams. At present, finite element method is used to calculate the value of stiffness and strength of rehabilitated beams. In this paper, a closed form formulation is presented for calculating stiffness of rehabilitated beams. In this method, the stiffness of rehabilitated beam is calculating based on the stiffness of perfect beam, stiffness of cracked beam, CFRP and adhesive properties and dimensions of structure. Cracked section of beam and reinforcing plate are modeled by an equivalent rotational spring. A procedure is proposed for calculating the stiffness of rotational spring. Formulation is studied in two categories of definite and indefinite beams, and implemented in two special cases of fixed and clamped beams. In order to verify proposed formulation, eighteen hypothetical specimens have been modeled by finite element method. Comparison of proposed formulation and F.E. results shows good agreement. Also another formula is suggested for practical applications by simplification of previous formulas. Simplified and accurate formulas results match very well. Using simplified formula, it's not necessary to know the depth of crack to determine the size of reinforcing CFRP plate.

Keywords

Rehabilitation, Steel Beam, Crack, Stiffness, CFRP

۱. دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران. eng_dehghani@yahoo.com ()

۲. استاد بخش عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس danesh_f@modares.ac.ir

کاهش سختی و افزایش دامنه ارتعاش تیرهای فولادی ترک‌خورده، موجب از دست رفتن کارایی سازه در بارهای بهره‌برداری می‌شود. این موضوع در بسیاری از سازه‌های فولادی که تحت تأثیر بارهای تناوبی با تعداد تکرار زیاد هستند (مثل پلهای فولادی راه‌آهن) موجب نگرانی و چاره‌اندیشی مهندسان سازه شده است. در تیرهای فولادی عموماً ترکها از بال کششی و از نقاطی که دارای جزئیات حساس به خستگی می‌باشند شروع شده و به سمت جان تیر گسترش می‌یابند. ترکهای کم‌عمق در محدوده بال تأثیر چندانی در کاهش سختی تیر ندارند؛ اما ترکهای عمیق بشدت سختی و مقاومت تیر را تحت تأثیر قرار می‌دهند. در مرجع [۱] نمونه‌هایی از ترکهای گسترش یافته داخل جان تیرهای فولادی شاهتیر پلها نشان داده شده و مهمترین دلایل ظهور و گسترش آنها عوامل جوشکاری، وجود ریزترکها و ناخالصی‌ها در فولاد، نقص در ساخت قطعات، نقص در حمل و نصب قعطات، آسیب‌های ایجادشده هنگام بهره‌برداری، محدوده تغییرات تنش، تعداد سیکلهای بارگذاری و نوع جزئیات مورد استفاده در طرح ذکر گردیده‌اند.

برای کاهش دامنه ارتعاش تیرهای ترک‌خورده بطور معمول از ورقهای تقویتی در مناطق ترک‌خورده استفاده می‌گردد. روش سنتی استفاده از ورقهای تقویتی فولادی می‌باشد که به تیر قدیمی جوش و یا پیچ می‌شوند. این روشها بدلیل نیاز به جوشکاری و یا سوراخکاری، مجدداً نقاط حساس به خستگی در سازه بوجود می‌آورند. در روشهای جدیدتر بجای استفاده از ورقهای فولادی، از ورقهای پلیمری FRP استفاده می‌شود. این ورقها علاوه بر دارا بودن مقاومت بسیار بیشتر از فولاد، وزن کمتری نسبت به فولاد داشته و بنابراین نصب آنها روی تیرهای آسیب‌دیده ساده‌تر می‌باشد [۲].

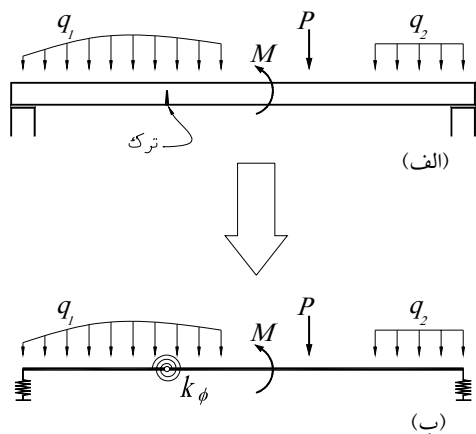
در تحقیقات محققان قبلی تقویت تیرهای فولادی با مصالح FRP عمدتاً بصورت آزمایشگاهی مورد مطالعه

قرار گرفته است. در مرجع [۳] چهار نمونه با مقیاس واقعی از یک پل آسیب‌دیده قدیمی استخراج گردیده و پس از تقویت نمونه‌ها با ورق CFRP مورد آزمایش قرار داده‌اند. در دانشگاه میسوری-رولا یک کار آزمایشگاهی روی چهار تیر $W12 \times 14$ دوسرمفصل با طول ۲۳۴۸ میلیمتر انجام شده است [۴]. در این تحقیق اثر ترک با یک شیار در تیر معادل‌سازی شده است. توکلی‌زاده و سعادت‌منش در سال ۲۰۰۱ هشت تیر فولادی $S5 \times 10$ به طول ۱۳۰۰ میلیمتر را تحت اثر خمش چهار نقطه‌ای مورد آزمایش قرار دادند [۵]. در شش نمونه یک شیار به عمق $3/2$ میلیمتر و $6/4$ میلیمتر ایجاد گردید. ورقهای CFRP با طولهای مختلف برای هر یک از دو عمق شیار مورد استفاده قرار گرفت (۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ میلیمتر برای شیار سطحی و ۲۰۰، ۴۰۰ و ۶۰۰ میلیمتر برای شیار عمیق). نتایج نشان دادند که سختی و ظرفیت نهایی تیرهای تقویت‌شده با ورقهای CFRP صرفنظر از طول ورقهای تقویتی افزایش می‌یابد.

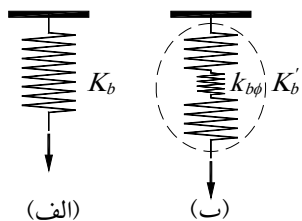
تحقیقات آزمایشگاهی دیگری نیز در زمینه تقویت تیرهای ترک‌خورده فولادی با استفاده از ورقهای FRP انجام شده است [۸و۶]. همچنین تحقیقاتی در زمینه تقویت تیرهای فولادی سالم با استفاده از ورقهای FRP انجام شده است [۳و۹و۱۱]. استراتفورد و همکارانش در سال ۲۰۰۶ مطالعه‌ای تحلیلی در مورد رفتار خطی تیرهای تقویت شده با ورق انجام دادند [۱۲]. همچنین تحقیقاتی در سال ۲۰۰۹ در زمینه عملکرد تیرهای تقویت شده با FRP در مقابل پدیده خستگی انجام شده است [۱۳].

در تحقیقات تحلیلی گذشته در زمینه ردیابی خرابی در سازه‌های فولادی روشهای گوناگونی برای مدلسازی تیر ترک‌خورده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در برخی از این تحقیقات اثر مقطع ترک‌خورد تیر را با کاهش مدول مقطع تیر در نظر گرفته شده [۱۴] و برخی سعی کرده‌اند تا نرمی موضعی مقطع ترک‌خورده را بدست آورند [۱۵]. برخی دیگر با صرفنظر کردن از اثرات برش در خمش (خمش خالص) مقطع ترک‌خورده را با یک فنر دورانی جایگزین

طرفین تیر با فنر دورانی $k_{b\phi}$ مشابه قطع کردن فنر K_b و وصل نمودن طرفین آن با فنر $k_{b\phi}$ می‌باشد شکل (۲-ب). در این حالت نیز مشاهده می‌گردد در صورتیکه سختی $k_{b\phi}$ بسیار بزرگ باشد، سختی مجموعه جدید برابر K_b خواهد بود و در حالتی که $k_{b\phi}$ بسیار کوچک باشد، مجموعه فنرهای سری متصل شده به یکدیگر ناپایدار خواهند شد.



شکل (۱): شبیه‌سازی ترک با فنر دورانی



شکل (۲): مدل شماتیک تبدیل سختی تیر معین و فنر دورانی اگر سختی مجموعه تیر و فنر دورانی برابر K'_b باشد، با توجه به قانون فنرهای سری رابطه (۱) بین سختی تیر و فنر دورانی وجود دارد.

$$K'_b = \frac{K_b \times k_{b\phi}}{K_b + k_{b\phi}} \quad (1)$$

که در آن $k_{b\phi}$ سختی بدست آمده از فنر $k_{b\phi}$ در کل سیستم می‌باشد. برای محاسبه $k_{b\phi}$ بایستی رابطه بین تغییر مکان مبنای اندازه‌گیری سختی (δ) و مقدار دوران فنر دورانی (θ) و همچنین رابطه میان نیروی مبنای اندازه‌گیری سختی (F) و لنگر ایجاد شده در فنر (M) را استخراج نمود و با استفاده از آنها رابطه میان $k_{b\phi}$ و K_b را بدست آورد. در حالتی که سازه معین باشد، رابطه میان

کرده‌اند [۱۶ و ۲۲]. در هریک از این تحقیقات روابطی نیز برای محاسبه میزان سختی فنر دورانی در حالاتی خاص ارائه گردیده است. در این مقاله نیز از مشابه‌سازی ترک با فنر دورانی استفاده شده است.

در این مقاله تأثیر چسباندن ورقهای CFRP روی تیرهای فولادی در بازیابی سختی تیر بطور تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته و فرمولاسیون محاسبه سختی تیر بهسازی شده ارائه شده است. همچنین فرمولهای ساده‌شده‌ای برای مقاصد کاربردی بهسازی تیرهای ترک‌خورده فولادی پیشنهاد گردیده است.

مطالعات انجام‌شده در این تحقیق با فرض ثابت بودن طول و عرض ترک در حین بارگذاری صورت گرفته و از اثرات گسترش ترک صرف‌نظر گردیده است.

۲- ارائه فرمولاسیون بازیابی سختی تیر ترک‌خورده

معین

چنانچه در بخش قبل نیز اشاره گردید، ترک‌خوردگی در یک تیر را می‌توان با یک مفصل داخلی و یک فنر دورانی در محل مفصل مدلسازی نمود. مقدار سختی فنر دورانی وابسته به مساحت باقیمانده از مقطع ترک‌خورده، عمق ترک و دیگر مشخصات سازه می‌باشد که در تحقیقات پیشین در حالات مختلفی بدست آمده است. در شکل (۱-الف) یک تیر دارای ترک در حالت کلی با تکیه‌گاه‌ها و بارگذاری کلی نشان داده شده است. مدل ساده شده این تیر همراه با فنر دورانی در شکل (۱-ب) نمایش داده شده است. چنانچه سختی این فنر یک مقدار بینهایت بزرگ باشد، تیر مدل شده در شکل (۱-ب) مشابه یک تیر سالم عمل نموده و سختی مجموعه تیر و فنر برابر تیر سالم خواهد بود. در حالتی که سختی فنر دورانی نزدیک به صفر باشد، مجموعه مدلسازی شده ناپایدار شده و سختی آن بسمت صفر میل می‌نماید.

پدیده فوق را می‌توان با مدل ساده‌تری نیز توضیح داد. فنر نشان داده شده در شکل (۲-الف) با سختی معادل سختی تیر سالم K_b در نظر بگیرد. ایجاد مفصل داخلی و اتصال

بدست می‌آید:

$$k_{b\phi} = \frac{F}{\delta} = \frac{\frac{8M}{l}}{\frac{\theta l}{4}} = \frac{32M}{l^2} = \frac{32k_{\phi}}{l^2} \quad (4)$$

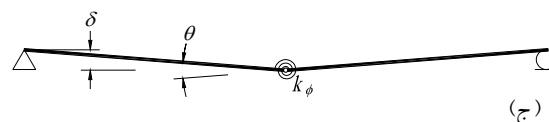
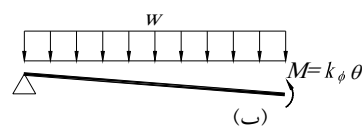
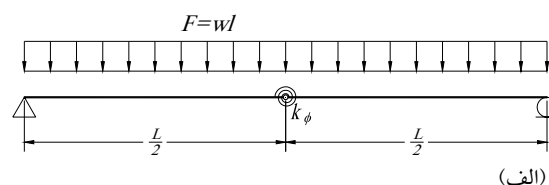
رابطه (۴) نحوه تبدیل سختی فنر دورانی در وسط یک تیر دو سرمفصل تحت بارگذاری گسترده یکنواخت به سختی کلی تیر را نشان می‌دهد. چنانچه در فرمول فوق نیز مشاهده می‌گردد، سختی معادل فنر دورانی با توجه به معین بودن سیستم سازه، مستقل از سختی خمشی سازه می‌باشد. ضریب ثابت این فرمول وابسته به محل ترک در طول تیر، نوع بارگذاری روی تیر و نحوه تعریف سختی مشخصه می‌باشد که در هر مورد بایستی استخراج گردد. با چسباندن ورق CFRP روی بال کششی در مقطع ترک‌خورده در واقع یک فنر دورانی دیگر علاوه بر فنر دورانی مقطع باقیمانده به تیر ترک‌خورده وصل می‌شود. بنابراین k_{ϕ} از مجموع این فنرها بدست می‌آید:

$$k_{\phi} = k_{\phi c} + k_{\phi p} \quad (5)$$

که در آن $k_{\phi c}$ سختی فنر دورانی معادل مقطع ترک‌خورده و $k_{\phi p}$ سختی فنر دورانی معادل ورق تقویتی می‌باشد. چنانچه در بخش قبل نیز اشاره گردید، رابطه‌های گوناگونی برای محاسبه سختی معادل فنر دورانی در مقطع ترک‌خورده توسط محققان مختلف ارائه گردیده است. فرمولهای ارائه شده، هر یک دارای فرضیاتی خاص بوده و برای شرایطی خاص قابل استفاده هستند. همچنین این فرمولها اغلب برای کاربردهای ردیابی ترک در سازه استفاده می‌شوند. در این مقاله فرض بر این است که محل و اندازه ترک مشخص می‌باشد و بنابراین در عمل سختی تیر ترک‌خورده K_{bc} قابل اندازه‌گیری می‌باشد. برای این کار الگوی بارگذاری مشخصی به سازه اعمال شده و تغییرمکان نقاط مختلف آن قبل و بعد از بارگذاری قرائت می‌گردد. با استفاده از مقادیر خیز ایجاد شده در اثر بار وارده، الگوی بارگذاری و مدل سازه می‌توان سختی مشخصه سازه در راستای تغییرمکان مورد نظر را استخراج نمود. در آیین‌نامه‌های مختلف طراحی پلها از جمله

M و F تنها به مشخصات هندسی سازه وابسته است و بنابراین رابطه میان $k_{b\phi}$ و k_{ϕ} نیز به یک رابطه هندسی تبدیل می‌گردد.

بطور مثال تیر دو سرمفصل نشان داده شده در شکل (۳-الف) که دارای یک مفصل و فنر دورانی در وسط دهانه بوده و تحت تأثیر نیروی گسترده یکنواخت است در نظر گرفته شده است.



شکل (۳): تیر دو سرمفصل با ترک در وسط دهانه

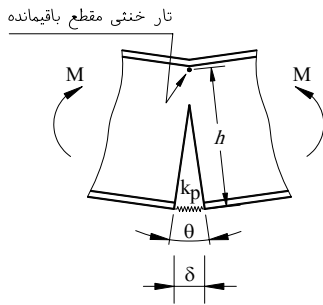
برای استخراج سختی ناشی از فنر دورانی از تغییرشکل‌های خمشی صرف‌نظر شده و تنها تغییرشکل‌های ناشی از فنر دورانی در نظر گرفته می‌شوند؛ عبارت دیگر اعضاء تیر بصورت المانهای صلب فرض می‌گردند. سختی مشخصه این سیستم بصورت مجموع نیروی وارده به تیر تقسیم بر تغییرمکان نقطه وسط آن تعریف گردیده است. با توجه به شکل (۳-ب) رابطه بین M و F از روابط تعادل نیروها به شکل رابطه (۳) بدست می‌آید:

$$\frac{F}{2} \times \frac{l}{4} = M \quad (2)$$

برای بدست آوردن رابطه δ و θ بایستی تغییرمکان δ با استفاده از رابطه‌های هندسی موجود بر حسب مقدار دوران θ استخراج گردد. با توجه به شکل (۳-ج) رابطه (۳) استخراج می‌گردد:

$$\frac{\theta}{2} \times \frac{l}{2} = \delta \quad (3)$$

باجایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) در رابطه تعریف سختی، اثر سختی فنر دورانی در راستای سختی مشخصه سیستم



شکل (۴): مدل شماتیک تقویت تیر روی بال کششی در محل ترک

نویسندگان این مقاله در مرجع [۲۴] نشان داده‌اند که سختی الاستیک یک ورق چسبیده به بستر صلب از رابطه (۹) محاسبه می‌گردد:

$$k_p = b_p \sqrt{\frac{G_a E_p t_p}{t_a}} \quad (9)$$

که در آن b_p عرض ورق تقویتی، G_a مدول الاستیسته برشی چسب، E_p مدول الاستیسته محوری ورق، t_p ضخامت ورق و t_a ضخامت لایه چسب می‌باشند. از آنجا که ورق چسبیده به بال کششی تیر ترک‌خورده از هر دو سمت ترک کشیده می‌شود، سختی معادل آن نصف مقدار بدست آمده از رابطه (۹) می‌باشد. بنابراین با جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۸) سختی دورانی معادل ورق تقویتی از رابطه (۱۰) بدست خواهد آمد:

$$k_{\phi} = \frac{b_p h^2}{2} \sqrt{\frac{G_a E_p t_p}{t_a}} \quad (10)$$

برای محاسبه سختی تیر بهسازی شده با CFRP، ابتدا سختی فنر دورانی معادل CFRP از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود. سختی فنر دورانی بدست آمده با استفاده از رابطه‌هایی همچون رابطه (۴)، که برای مورد خاص بیان شده در این مقاله ارائه شده است، به سختی معادل در سازه تبدیل شده و سپس با سختی فنر دورانی معادل مقطع ترک‌خورده که از رابطه (۶) بدست می‌آید، جمع می‌شود. در نهایت سختی کلی تیر بهسازی شده از رابطه (۱) استخراج می‌گردد.

آیین‌نامه بارگذاری پلهای ایران، اصول و ضوابط آزمایش بارگذاری پلهای ارائه گردیده است [۲۳]. با علم به این موضوع می‌توان در رابطه (۱) پارامتر K_{bc} سختی تیر ترک‌خورده را با پارامتر K'_b ، $k_{b\phi c}$ سختی معادل فنر دورانی مقطع ترک‌خورده در مجموعه تیر را با $k_{b\phi}$ جایگزین نمود. در صورتیکه در این رابطه $k_{b\phi c}$ به سمت چپ آورده شود، می‌توان سختی معادل فنر دورانی مقطع ترک‌خورده را در مجموعه یک تیر با شرایط معین استاتیکی از رابطه (۶) محاسبه نمود:

$$k_{b\phi c} = \frac{K_b \times K_{bc}}{K_b - K_{bc}} \quad (6)$$

که در آن K_b سختی تیر سالم و دیگر پارامترها همان تعاریف قبلی را دارند. برای تبدیل $k_{b\phi c}$ به $k_{\phi c}$ بایستی از رابطه‌هایی همچون رابطه (۴)، که برای حالت خاص شرح داده شده بدست آمد، استفاده نمود. در کاربردهای عملی (مثل شاتیر پلهای فولادی) نیز محاسبه سختی تیر ترک‌خورده تحت انواع بارگذاری محتمل بر روی عضو مورد نظر می‌تواند با اندازه‌گیری‌های محلی انجام شود. بدین ترتیب سختی فنر دورانی معادل مقطع ترک‌خورده بسادگی و بطور دقیق بدست می‌آید.

با توجه به شکل (۴) از آنجا که قسمت باقیمانده مقطع، شامل بخشی از جان و کل بال فشاری می‌شود و بال کششی حذف شده، تارخنثی آن بسیار نزدیک به بال فشاری می‌باشد. بنابراین بطور تقریبی می‌توان ارتفاع h را برابر کل ارتفاع تیر در نظر گرفت. بنابراین مقدار سختی دورانی معادل ورق تقویتی را می‌توان بر حسب سختی محوری ورق چسبیده به فولاد به شکل زیر و از رابطه (۸) محاسبه نمود:

$$M = F \times h = k_p \times \delta \times h = k_p \times \theta \times h \times h \quad (7)$$

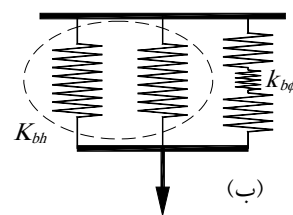
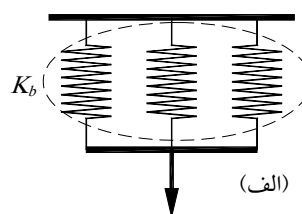
$$k_{\phi} = \frac{M}{\theta} = k_p h^2 \quad (8)$$

که در آن h عمق تیر و k_p سختی محوری ورق چسبیده به بال کششی می‌باشد.

۳- ارائه فرمولاسیون بازیابی سختی تیر ترک خورده

نامعین

در بخش قبل فرمولاسیون بازیابی سختی تیرهای ترک خورده فولادی با شرایط معین استاتیکی استخراج گردید. در حالتیکه تیر ترک خورده یک سازه نامعین باشد، فرمولاسیون بدست آمده اندکی متفاوت می باشد. در این حالت در صورت حذف فنر دورانی هنوز سازه پایدار بوده و سختی آن صفر نمی شود، بلکه یک درجه از نامعینی سازه کاهش می یابد. بنابراین رابطه (۱) نیازمند اصلاحاتی برای این نوع سازه ها می باشد. مدل شماتیک این مسأله در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل (۵): مدل شماتیک تبدیل سختی تیر نامعین و فنر دورانی

با توجه به شکل (۵) مشاهده می گردد، در صورتیکه سختی فنر $k_{b\phi}$ یک مقدار بینهایت بزرگ باشد، سختی کل سیستم برابر سختی تیر سالم خواهد بود و در صورتیکه سختی فنر $k_{b\phi}$ برابر صفر باشد، سختی کل سیستم از مجموع سختی فنرهای باقیمانده بدست می آید. بر این اساس می توان رابطه (۱) را به شکل رابطه (۱۱) اصلاح نمود:

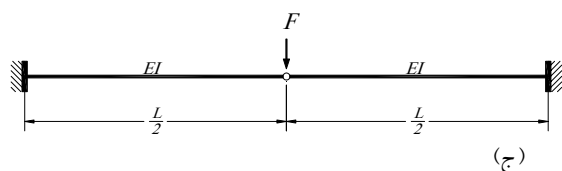
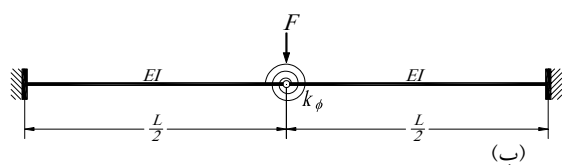
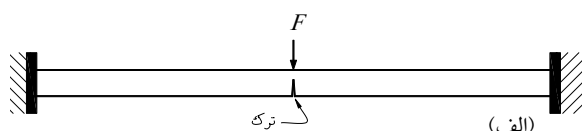
$$K'_b = \frac{(K_b - K_{bh}) \times k_{b\phi} + K_{bh}}{(K_b - K_{bh}) + k_{b\phi}} \quad (11)$$

که در آن K_{bh} سختی سازه با فرض وجود مفصل در مقطع ترک می باشد و دیگر پارامترها همان تعاریف قبلی

را دارند.

تفاوت دیگری که در فرمولاسیون تیرهای نامعین ترک خورده وجود دارد، نحوه تعیین رابطه تبدیل سختی فنر دورانی به سختی سازه می باشد. با توجه به اینکه تشخیص سیستم سازه معین باقیمانده با سختی $(K_b - K_{bh})$ همواره بسادگی امکان پذیر نمی باشد، می توان از روش معکوس استفاده نمود. بدین ترتیب که ابتدا سختی K'_b را از روابط تحلیل سازه ها استخراج نموده و سپس با ساده سازی رابطه آن را به شکل رابطه (۱۱) در آورده و مقدار $k_{b\phi}$ را استخراج نمود.

در اینجا رابطه مورد نظر برای یک تیر دوسرگردار با یک ترک در وسط دهانه و تحت اثر بار متمرکز در وسط دهانه بدست آمده است، شکل (۶-الف).



شکل (۶): تیر دوسرگردار با ترک در وسط دهانه

با استفاده از رابطه های تعادل و سازگاری، رابطه (۱۲) برای سختی کلی سیستم نشان داده شده در شکل (۶-ب) بدست می آید:

$$K'_b = \frac{96EI \left(2l + \frac{2EI}{k_{\phi}} \right)}{l^4 + \frac{4EI^3}{k_{\phi}}} \quad (12)$$

سازه باقیمانده با فرض حذف سختی خمشی مقطع ترک خورده در شکل (۶-ج) نشان داده شده است. سختی



المانهای پوسته‌ای و چسب اتصال دهنده این مواد با المانهای مکعبی مدل‌سازی گردیده‌اند. مدل‌سازی ترک بصورت یک ناپیوستگی (شیار) انجام شده و از اثرات گسترش ترک صرف‌نظر گردیده است. بارگذاری تیرها در نمونه‌های دوسرهمفصل بصورت گسترده و یکنواخت روی بال فوقانی تیر (مشابه شکل (۳)) و در نمونه‌های دوسرگیردر بصورت متمرکز در وسط دهانه (مشابه شکل (۶)) انجام شده است. برای ایجاد اتصال مفصلی در نمونه‌های دوسرهمفصل، کلیه گره‌های روی جان تیر در دو لبه انتهایی در جهت انتقالی قائم مقید گردیده‌اند. همچنین برای مدل‌سازی اتصال گیردار در نمونه‌های دوسرگیردار، تمام گره‌های روی جان و بال تیر در دو لبه انتهایی در هر سه جهت انتقالی مقید شده‌اند. برای استخراج سختی تیرها در حالات مختلف از تحلیل استاتیکی استفاده شده است. در این تحلیل‌ها اثرات غیرخطی مصالح در مورد فولاد بصورت رفتار الاستوپلاستیک ایده‌آل در نظر گرفته شده و بدین ترتیب مقاومت نهایی نمونه‌ها نیز با فرض اینکه مود گسیختگی تیر، تسلیم فولاد باشد استخراج گردیده است. در عمل برای اینکه دیگر مودهای گسیختگی در سیستم فولاد و CFRP مثل جداشدگی CFRP و گسیختگی آن حاکم نگردند، بایستی طول و ابعاد ورق CFRP به شکل مناسبی انتخاب گردند. از آنجا که بررسی مودهای مختلف گسیختگی تیر تقویت‌شده با CFRP خارج از موضوع این تحقیق می‌باشد، در اینجا از ارائه توضیحات بیشتر صرف‌نظر می‌گردد. در شکل (۷) و شکل (۸) و شکل (۹) نمونه‌هایی از مدل‌های ساخته‌شده مشاهده می‌گردد.

K_{bh} با توجه به این شکل از مجموع سختی دو تیر طره به طول $\frac{l}{2}$ از رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$K_{bh} = 2 \times \frac{3EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^3} = \frac{48EI}{l^3} \quad (13)$$

با کسر رابطه (۱۳) از رابطه (۱۲) جمله اول رابطه (۱۱) به شکل زیر از رابطه (۱۴) بدست می‌آید:

$$K'_b - K_{bh} = \frac{72EI k_\phi}{l^2 \left(\frac{lk_\phi}{2} + 2EI \right)} \quad (14)$$

مقدار فوق سختی سیستم معین باقیمانده از سازه پس از کسر K_{bh} می‌باشد. برای استخراج سختی ناشی از فنر دورانی بایستی از تغییرشکل‌های خمشی تیر صرف‌نظر نمود. بنابراین حد رابطه (۱۴) وقتی که EI به سمت بینهایت میل می‌کند برابر $k_{b\phi}$ خواهد بود:

$$k_{b\phi} = \lim_{EI \rightarrow \infty} \frac{72EI k_\phi}{l^2 \left(\frac{lk_\phi}{2} + 2EI \right)} \quad (15)$$

$$k_{b\phi} = \frac{72k_\phi}{2l^2} = \frac{36k_\phi}{l^2} \quad (16)$$

رابطه (۱۶)، سختی ایجاد شده ناشی از فنر k_ϕ در مجموعه نشان داده شده در شکل (۶-ب) را ارائه می‌کند. چنانچه مشاهده می‌گردد رابطه بدست آمده باز هم مستقل از سختی خمشی تیر می‌باشد. علت این امر جدا کردن سختی قسمت نامعین سازه از سیستم می‌باشد. همچنین ضریب ثابت داخل فرمول در این مورد برابر ۳۶ بدست آمده است.

۴ - مقایسه نتایج فرمولاسیون پیشنهادی با روش اجزاء

محدود

به منظور صحت‌سنجی رابطه‌های استخراج شده، در این قسمت مدل اجزاء محدود سازه‌های بررسی شده نیز در هجده مورد متفاوت ساخته شده و نتایج بدست آمده از آن با نتایج حاصله از فرمولها مقایسه شده است. برای این منظور از نرم‌افزار اجزاء محدود ABAQUS استفاده شده است. تیر فولادی و ورق تقویتی CFRP با استفاده از

ترک خوردگی سه عمق ترک ۵، ۱۰ و ۱۵ سانتی متر در نظر گرفته شده‌اند. همچنین تغییرات سختی سیستم تقویت‌کننده با تغییر ضخامت CFRP بررسی شده است. بدین منظور سه ضخامت مختلف ۱، ۲ و ۳ میلیمتر مطالعه شده‌اند. ضخامت لایه چسب با توجه به محدودیتهای اجرایی در همه حالات برابر یک میلیمتر فرض گردیده است. مشخصات مصالح تشکیل دهنده سازه در جدول (۱) ارائه گردیده‌اند.

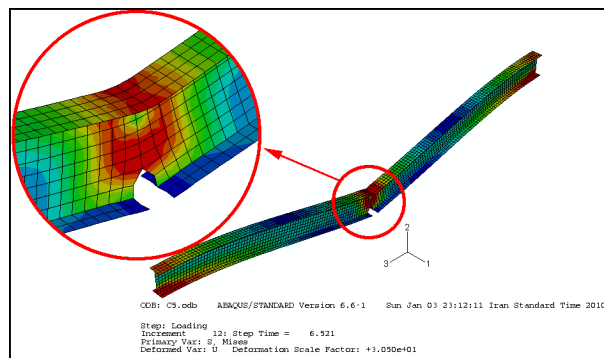
جدول (۱): مشخصات مصالح مصرفی

ضریب پواسون	مدول الاستیسیته (مگاپاسکال)	مقاومت تسلیم کششی (مگاپاسکال)	ضریب پواسون
۰/۳	۲۱۰۰۰۰	۲۴۰	فولاد
۰/۲۸	۱۶۵۰۰۰	-----	CFRP
۰/۳۶	۴۰۱۳	۲۲/۵۳	چسب

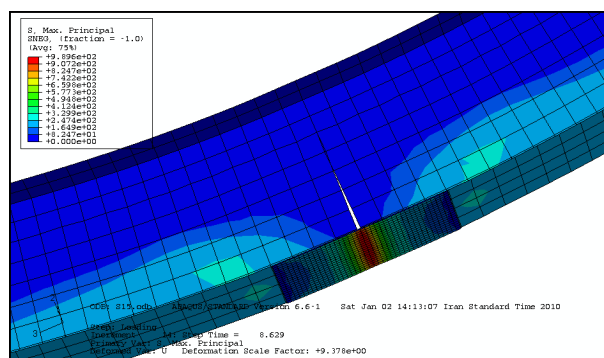
امتداد ورق CFRP در مناطق بدون ترک باعث افزایش مقاومت خمشی مقطع و در نتیجه افزایش سختی تیر می‌گردد. در نمونه‌های مطالعه شده حداقل طول ورق لازم برای اتصال طرفین ترک مدلسازی شده تا نتایج بدست‌آمده از تحلیل منطبق بر فرضیات فرمولهای استخراج‌شده باشند. آنجا که طول گیرایی الاستیک ورق CFRP با مشخصات ارائه شده کمتر از ۱۰ سانتی متر می‌باشد، طول ورق تقویتی ۲۰ سانتی متر در نظر گرفته شده است.

نامگذاری نمونه‌ها به این صورت انجام شده که حرف اول نشانگر نوع تکیه‌گاهها (S برای دوسرهمفصل و C برای دوسرگیردار)، عدد بعد از حرف نشانگر عمق ترک به سانتی متر و عدد آخر که با خط تیر جدا شده است نشانگر ضخامت ورق CFRP بر حسب میلیمتر می‌باشد.

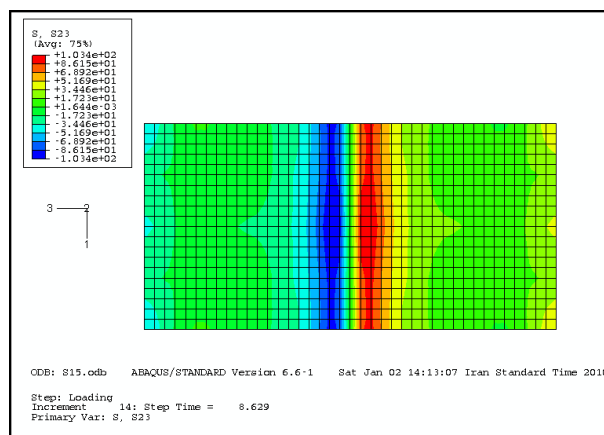
برای اطمینان از نحوه مدلسازی و تحلیل اجزاء محدود، دو نمونه مرجع در مورد تیرهای تقویت شده با اتصالات چسبی که نتایج آزمایشگاهی آنها موجود می‌باشد، مدلسازی



شکل (۷): تغییر شکل تیر دوسرگیردار با ترک به عمق ۵ سانتی متر



شکل (۸): تغییر شکل تیر دوسرهمفصل با ترک به عمق ۱۵ سانتی متر، بهسازی شده با CFRP



شکل (۹): نمایش تنشهای برشی داخل لایه چسب اتصال دهنده فولاد و CFRP

نمونه‌های تیر دوسرهمفصل با بارگذاری گسترده یکنواخت و تیر دوسرگیردار با بار متمرکز در وسط دهانه مدلسازی شده‌اند. در این مدلها مقطع تیر از نوع IPE200 و ورق تقویتی از نوع CFRP به عرض بال کششی و با ضخامت‌های مختلف می‌باشد. برای بررسی حالات مختلف



گردیده و نتایج بدست آمده از تحلیل با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند. نمونه‌های مرجع یک تیر بتنی تقویت شده با ورق فولادی چسبیده به وجه تحتانی و یک تیر فولادی تقویت شده با ورقهای CFRP بوده‌اند [۲۵ و ۲۶].

در مقایسه نتایج بدست آمده از تحلیل اجزاء محدود انجام شده و فرمولاسیون پیشنهادی ارائه گردیده است. در ستون شماره (۱) و (۲) سختی تیر سالم و تیر ترک خورده با استفاده از نتایج تحلیل اجزاء محدود استخراج گردیده است. در کاربردهای عملی، این مقادیر بایستی از اندازه‌گیری‌های محلی استخراج گردند. در ستونهای

شماره (۳) تا (۶) پارامترهای مختلف مورد استفاده در فرمولاسیون ارائه شده محاسبه شده‌اند. در ستون شماره (۷) سختی تیر بهسازی شده با روش تحلیلی بدست آمده است. در ستون شماره (۸) سختی تیر بهسازی شده بر اساس نتایج تحلیل اجزاء محدود ارائه گردیده است. در ستون شماره (۹) نسبت مقادیر ارائه شده در ستونهای شماره (۷) و (۸) که معرف میزان خطای روش تحلیلی می‌باشد نشان داده شده است.

جدول (۲): مقایسه نتایج فرمولاسیون پیشنهادی با نتایج تحلیل انجام شده به روش اجزاء محدود

نام نمونه	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
	سختی تیر سالم	سختی تیر ترک خورده	سختی معادل فز دورانی مقطع ترک	سختی دورانی ناشی از ورق CFRP	اثر سختی CFRP در سیستم کلی	سختی فز دورانی در سیستم	سختی تیر بهسازی شده	سختی بدست آمده از تحلیل اجزاء محدود	نسبت خطا	فرمول طراحی	نسبت خطا
	K_b	K_{bc}	$k_{b\phi c}$	$k_{\phi p}$	k_{bp}	$k_{b\phi}$	K_{rb}	K_{ABQS}		K_d	
S5-1	4616	3310	11699	$3/120 \times 10^{10}$	62402	74101	4345	4324	1/005	4298	1/011
S5-2	4616	3310	11699	$4/412 \times 10^{10}$	88250	99949	4412	4440	0/994	4387	1/006
S5-3	4616	3310	11699	$5/404 \times 10^{10}$	108083	119782	4445	4501	0/987	4427	1/004
S10-1	4616	2028	3617	$3/120 \times 10^{10}$	62402	66019	4314	4233	1/019	4298	1/004
S10-2	4616	2028	3617	$4/412 \times 10^{10}$	88250	91867	4395	4389	1/001	4387	1/002
S10-3	4616	2028	3617	$5/404 \times 10^{10}$	108083	111700	4433	4465	0/993	4427	1/001
S15-1	4616	630	730	$3/120 \times 10^{10}$	62402	63131	4301	4208	1/022	4298	1/001
S15-2	4616	630	730	$4/412 \times 10^{10}$	88250	88979	4388	4378	1/002	4387	1/000
S15-3	4616	630	730	$5/404 \times 10^{10}$	108083	108813	4428	4459	0/993	4427	1/000
C5-1	10304	7803	16151	$3/120 \times 10^{10}$	70202	86353	9669	9645	1/003	9538	1/014
C5-2	10304	7803	16151	$4/412 \times 10^{10}$	99281	115432	9819	9899	0/992	9746	1/008
C5-3	10304	7803	16151	$5/404 \times 10^{10}$	121594	137745	9893	10035	0/986	9842	1/005
C10-1	10304	6207	6849	$3/120 \times 10^{10}$	70202	77051	9600	9451	1/016	9538	1/006
C10-2	10304	6207	6849	$4/412 \times 10^{10}$	99281	106130	9779	9781	1/000	9746	1/003
C10-3	10304	6207	6849	$5/404 \times 10^{10}$	121594	128443	9865	9948	0/992	9842	1/002
C15-1	10304	5156	3873	$3/120 \times 10^{10}$	70202	74075	9574	9395	1/019	9538	1/004
C15-2	10304	5156	3873	$4/412 \times 10^{10}$	99281	103154	9765	9753	1/001	9746	1/002
C15-3	10304	5156	3873	$5/404 \times 10^{10}$	121594	125467	9856	9931	0/992	9842	1/001

$$k_{b\phi} = Ab_p \left(\frac{h}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{G_a E_p t_p}{t_a}} \quad (19)$$

که در آن A ضریب ثابتی است که با توجه به شرایط تکیه‌گاهی، نوع بارگذاری و نحوه تعریف سختی مشخصه سازه با روش شرح داده شده در این مقاله قابل استخراج است. سختی تیر بهسازی شده را می‌توان بطور کلی از رابطه (۱۱) محاسبه نمود.

استفاده از رابطه (۱۹) در کاربردهای عملی بهسازی سازه‌ها علاوه بر دارا بودن دقت بالا و سهولت در انجام محاسبات، این حسن را دارد که خطای آن در جهت محافظه‌کاری می‌باشد.

شکل (۱۰) و شکل (۱۱) منحنی نیرو-تغییر مکان نمونه‌های سالم، ترک‌خورده و بهسازی شده تیر دوسر مفصل و دوسر گیردار با ترک به عمق ۱۵ سانتی‌متر را نشان می‌دهند. چنانچه مشاهده می‌شود سختی و مقاومت نمونه‌های ترک‌خورده تیر نسبت به تیر سالم بشدت کاهش یافته است. در مورد تیر دوسر گیردار با توجه به نامعینی سیستم مقدار کاهش کمتری دیده می‌شود. سختی و مقاومت نمونه‌های بهسازی شده در همه موارد بسیار نزدیک به تیر سالم می‌باشد. نتایج مشابهی در دیگر موارد بررسی شده نیز بدست آمده‌اند. مشاهده می‌شود افزایش سختی بیش از حد سیستم تقویت‌کننده تأثیر چندانی در نتیجه بهسازی تیر ندارد. این نتیجه با توجه به رابطه (۱) نیز مورد انتظار می‌باشد.

شکل (۱۲) نمودار نیرو-تغییر مکان نمونه‌های سالم، ترک‌خورده و بهسازی شده تیر دوسر مفصل با ترک به عمق ۵ سانتی‌متر را نشان می‌دهد. چنانچه در این نمودار مشاهده می‌گردد بعلت کم بودن عمق ترک، سختی و مقاومت تیر ترک‌خورده کاهش کمتری داشته است.

با توجه به مقادیر محاسبه شده در ستون شماره (۹) مشاهده می‌گردد فرمولاسیون ارائه شده و روش اجزاء محدود تطابق بسیار خوبی با یکدیگر دارند. اختلاف اندک بدست آمده بین روش تحلیلی و اجزاء محدود ناشی از موارد مختلفی می‌باشد که دو مورد از مهمترین آنها عبارتند از: طول ورق تقویتی و اثر آن در افزایش سختی خمشی مقاطع سالم تیر که اثر آن در فرمولاسیون این تحقیق دیده نشده و سختی خمشی ورق CFRP بخصوص در وره‌های به ضخامت ۳ میلیمتر که باعث افزایش سختی کلی تیر بهسازی شده نسبت به مقدار محاسبه شده می‌شود.

مقایسه مقادیر محاسبه شده در ستون‌های شماره (۳) و (۵) نشان می‌دهد سختی سیستم تقویت‌کننده چندین برابر بزرگتر از سختی باقیمانده در مقطع ترک‌خورده می‌باشد. این نتیجه بخصوص در مورد ترک‌های عمیق‌تر قابل تأمل می‌باشد. با توجه به این موضوع می‌توان برای مقاصد کاربردی بهسازی سازه‌ها، از وجود سختی باقیمانده در مقطع ترک‌خورده صرف‌نظر نمود. سختی بدست‌آمده با در نظر گرفتن این فرضیه در ستون شماره (۱۰) ارائه شده است. در ستون شماره (۱۱) نسبت خطای این فرمول نسبت به روش دقیقتر محاسبه شده است. چنانچه مشاهده می‌گردد اختلاف بدست‌آمده بسیار ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد. با استفاده از این موضوع سختی ناشی از ورق تقویتی CFRP، در موارد بررسی شده در این تحقیق به شکل زیر ساده می‌گردند:

$$k_{b\phi} = 16b_p \left(\frac{h}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{G_a E_p t_p}{t_a}} \quad (17)$$

$$k_{b\phi} = 18b_p \left(\frac{h}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{G_a E_p t_p}{t_a}} \quad (18)$$

رابطه (۱۷) اثر ورق CFRP در سختی تیر دوسر مفصل بررسی شده و رابطه (۱۸) اثر ورق CFRP در سختی تیر دوسر گیردار بررسی شده را نشان می‌دهند. بطور کلی می‌توان اثر ورق CFRP در سختی تیر فولادی ترک‌خورده را به شکل رابطه (۱۹) نشان داد:



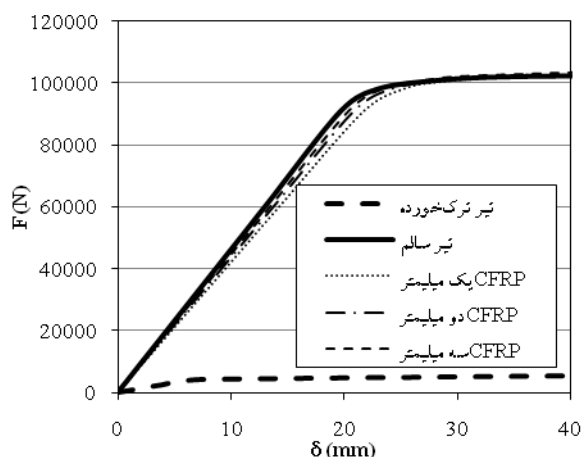
۵ - نتیجه گیری

در این مقاله فرمولاسیون محاسبه سختی تیر فولادی ترک خورده بهسازی شده با ورقهای CFRP به روش تحلیلی ارائه گردید. برای این منظور از مشابه سازی سختی خمشی قسمت باقیمانده در مقطع ترک و ورق تقویتی با یک فنر دورانی استفاده شد. با توجه به محدودیت روابط ارائه شده برای محاسبه سختی فنر دورانی معادل مقطع ترک، در این پژوهش محاسبه این سختی بر اساس سختی تیر ترک خورده، که در عمل قابل اندازه گیری می باشد، پیشنهاد شده است. فرمولاسیون استخراج سختی فنر دورانی بر اساس سختی تیر ترک خورده و سختی تیر سالم ارائه گردید.

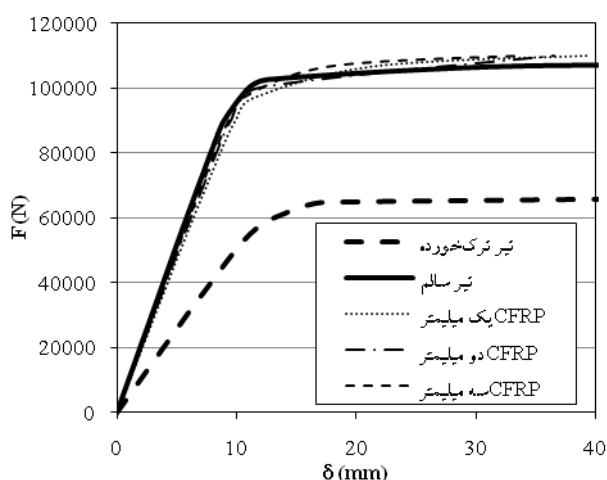
روش محاسبه سختی تیر بهسازی شده با ورق CFRP در دو دسته تیرهای معین و نامعین ارائه شد و فرمولاسیون پیشنهاد شده برای دو مورد خاص تیر دوسر مفصل و دوسر گیردار پیاده سازی گردید.

نتایج بدست آمده از روش تحلیلی پیشنهادی با نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود مطالعه شده در این تحقیق مقایسه گردید و تطابق بسیار خوبی مشاهده شد. چنانچه در بخش قبل دیده شد، چسباندن ورق CFRP روی بال کششی تیرهای آسیب دیده توسط ترک می تواند تا حد بسیار زیادی سختی و مقاومت تیر را بازیابی کند. همچنین مشاهده گردید افزایش بیش از حد سختی و مقاومت ورق CFRP تأثیر چندانی در نتیجه پروسه بهسازی ندارد.

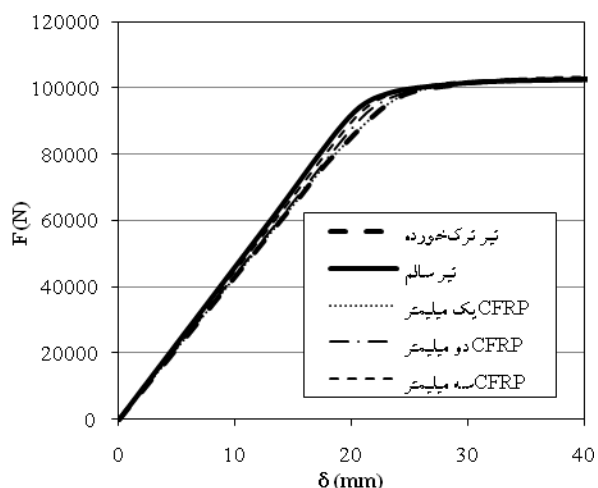
با توجه به نتایج بدست آمده از تحقیق، فرمول دیگری با صرف نظر کردن از سختی خمشی قسمت باقیمانده در مقطع ترک، برای محاسبه سختی تیر بهسازی شده با CFRP ارائه شد. مقایسه نتایج بدست آمده از این فرمول و فرمولهای دقیقتر نشان دهنده دقت بسیار خوب رابطه پیشنهادی است. با استفاده از این روش می توان بدون نیاز به اندازه گیری عمق ترک، میزان مصالح مورد نیاز برای بهسازی تیر با CFRP را از روابط ساده ای محاسبه نمود. استفاده از فرمول ساده شده برای کاربردهای عملی بهسازی



شکل (۱۰): منحنی نیرو-تغییر مکان تیر دو سر مفصل با ترک به عمق ۱۵ سانتی متر



شکل (۱۱): منحنی نیرو-تغییر مکان تیر دو سر گیردار با ترک به عمق ۱۵ سانتی متر



شکل (۱۲): منحنی نیرو-تغییر مکان تیر دو سر مفصل با ترک به عمق ۵ سانتی متر

symposium on bond behaviour of FRP in structures. Hong Kong: International Institute for FRP in Construction; (2005), pp. 419-26.

- 10- Youssef M.A., "Analytical prediction of the linear and nonlinear behaviour of steel beams rehabilitated using FRP sheets", *Engineering Structures* 28 (2006), pp. 903-911
- 11- Zhao, X., Zhang, L., "State-of-the-art review on FRP strengthened steel structures", *Engineering Structures* 29 (2007), pp. 1808-1823.
- 12- Stratford, T., Cadei, J., "Elastic analysis of adhesion stresses for the design of a strengthening plate bonded to a beam", *Construction and Building Materials* 20 (2006), pp. 34-45.
- 13- Bocciarelli, M., Colombi, P., Fava, G., Poggi, C., "Fatigue performance of tensile steel members strengthened with CFRP plates", *Composite Structures* 87 (2009), pp. 334-343.
- 14- Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D., "Influence of a crack on the dynamic characteristics of structures", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* 111 (1989), pp. 251-256.
- 15- Adams, R.D., Cawley, P., Pye, C.J., Stone, B.J., "A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures", *Journal of Mechanical Engineering Science* 20 (1978), pp. 93-100.
- 16- Gudmundson, P., "The dynamic behavior of slender structures with cross-sectional cracks", *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 31 (1983), pp. 329-345.
- 17- Rizos, P.F., Aspragathos, N., Dimarogonas, A.D., "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes", *Journal of Sound and Vibration* 138 (1990), pp. 381-388.
- 18- Liang, R.Y., Hu, J., Choy, F., "Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures", *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 118 (1992), pp. 384-396.
- 19- Khaji, N., Shafiei, M., Jalalpour, M., "Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 51, Issues 9-10, September-October 2009, pp. 667-681.

تیرهای ترک‌خورده فولادی پیشنهاد شده است.

بررسی نمودارهای نیرو-تغییرمکان بدست آمده از نمونه‌های مطالعه شده نشان داد که در تمام نمونه‌های بهسازی شده مقاومت خمشی تیر بطور کامل بازیابی شده است.

۶ - مراجع

- 1- FHWA NHI 03-002, Bridge Inspector's Reference Manual, Section 8, "Inspection and Evaluation of Common Steel Superstructures".
- 2- Shaat, A., Schnerch, D., Fam, A., Rizkalla, S., "Retrofit of steel structures using Fiber-Reinforced Polymers (FRP): State-of-the-art., In: Transportation research board (TRB) annual meeting. 2004. CD-ROM(04-4063).
- 3- Gillespie, J. W., Mertz, D. R., Kasai, K., Edberg, W. M., Demitz, J. R., and Hodgson, I., "Rehabilitation of Steel Bridge Girders: Large Scale Testing.", *Proceeding of the American Society for Composites, 11th Technical Conference on Composite Materials*, (1996), pp. 231-240.
- 4- Liu, X., Silva, P. F., Nanni, A., "Rehabilitation of Steel Bridge Members with FRP Composite Materials", *Proc., CCC2001, Composites in Construction, Porto, Portugal*, (2001), pp. 613-617.
- 5- Tavakkolizadeh, M., Saadatmanesh, H., "Repair of Cracked Steel Girders Using CFRP Sheets", *Proc. ISEC-01, Hawaii*, 24-27 January (2001).
- 6- Colombi, P., Bassetti, A., Nussbaumer, A., "Analysis of cracked steel members reinforced by pre-stress composite patch", *Fatigue Fracture of Engineering Materials Structures* 26 (2003), pp. 59-66.
- 7- Edberg, W., Mertz, D., Gillespie, J., "Rehabilitation of Steel Beams Using Composite Materials", *Proceedings of the Materials Engineering Conference, Materials for the New Millenium, ASCE, New York, NY*, Nov 10-14, (1996), pp. 502-508.
- 8- Sen, R., Liby, L., Mullins, G., "Strengthening steel bridge sections using CFRP laminates", *Compos: Part B* 32 (2001), pp. 309-22.
- 9- Xia, S.H., Teng, J.G., "Behaviour of FRP-to-steel bonded joints", In: Chen, J.F., Teng, J.G., editors. *Proceedings of the international*



20- Biondi, B., Caddemi, S., "Closed form solutions of Euler-Bernoulli beams with singularities", International Journal of Solids and Structures 42 (2005), pp. 3027-3044.

21- Yavari, A., Sarkani, S., "On applications of generalized functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities", International Journal of Mechanical Sciences 43 (2001), pp. 1543-1562.

22- Stankovi'c, B., Atanackovi'c, T.M., "Generalized solutions to a linear discontinuous differential equation", J. Math. Anal. Appl. 324 (2006), pp. 1462-1469.

۲۳- معاونت برنامه‌ریزی و نظارت راهبردی رئیس جمهور، «آیین‌نامه بارگذاری پلها»، نشریه ۱۳۹، تجدید نظر اول، ۱۳۷۹.

۲۴- دهقانی، احسان، «مقاوم‌سازی تیرهای ترک‌خورده فولادی بوسیله ورق‌های FRP»، رساله دکتری تخصصی عمران-سازه به راهنمایی دکتر فرهاد دانشجو، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۹.

25- Roberts T.M., "Approximate analysis of shear and normal stress concentrations in the adhesive layer of plated RC beams", Structural Engineering 1989;67(12):229-33

26- Sebastian, Wendel, M., "Nonlinear influence of contraflexure migration on near-curtailment stresses in hyperstatic FRP-laminated steel members", Computers and Structures 81 (2003) 1619-1632